

Inhaltsverzeichnis

Grundbegriffe der Geometrie

Parallele Geraden

Schnittpunkt von Geraden

Orthogonale Geraden

Abstände

Das Koordinatensystem

Figuren

Vierecke

Familie der Vierecke

Diagonalen in Vielecken

Umfang bei Figuren

Flächeninhalte

Körper

Quader

Würfel

Netz eines Körpers

Volumen eines Quaders

Oberfläche eines Quaders

Winkel

Winkelmaß

Geometrische Abbildungen

Symmetrien

Ortslinien

Kreis

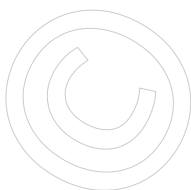
Mittelsenkrechte

Sätze im Dreieck

Satz des Thales

Satz des Pythagoras

Strahlensätze



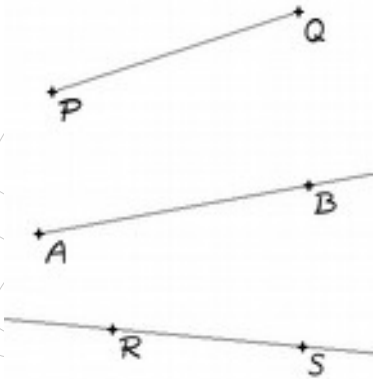
Grundbegriffe der Geometrie

Die Ebene ist eine Menge von unendlich vielen Punkten.

Eine gerade Linie mit einem Anfangs- und einem Endpunkt nennt man eine Strecke. \overline{PQ}

Eine Halbgerade hat einen Anfangspunkt und ist nach der anderen Seite unbegrenzt. \overrightarrow{AB}

Durch zwei verschiedene Punkte R und S geht genau eine Gerade g. Eine Gerade ist nach beiden Seiten unbegrenzt und besteht aus unendlich vielen Punkten. $RS = g$



Parallele Geraden

Zwei Geraden g und h sind parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben. $g \parallel h$

Schnittpunkt von Geraden

Den gemeinsamen Punkt zweier Geraden nennt man Schnittpunkt.

Orthogonale Geraden

Zwei Geraden g und h sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn beim Falten eines Papiers längs einer Geraden die andere mit sich zusammenfällt. $g \perp h$

Das Koordinatensystem

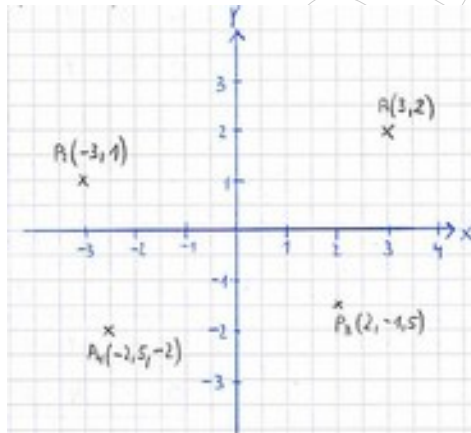
Um in der Geometrie mit den Objekten rechnen zu können, muss man jedem Punkt der Ebene Zahlen (ein Zahlenpaar) zuordnen.

Dies kann durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem geschehen, bei dem zwei Zahlengeraden sich im Nullpunkt orthogonal schneiden.

Diesen Schnittpunkt nennt man Ursprung, die nach rechts zeigende Gerade ist die x-Achse, die nach oben zeigende die y-Achse.

Die Zahlen, durch die ein Punkt bestimmt wird, nennt man Koordinaten.

Bsp.:



(Quelle: www.frustfrei-lernen.de)



Abstände

Abstand Punkt P – Gerade g

Die kürzeste Entfernung eines Punktes auf der Geraden g zum Punkt P nennt man Abstand.

Zeichnet man eine Gerade durch diesen Punkt R auf g und den Punkt P , so ist diese orthogonal zu g .

Abstand zweier Geraden g und h

Den Abstand der Geraden g und h (für $g \parallel h$) erhält man als Abstand eines (beliebigen) Punktes auf g zur Geraden h .



Ebene Figuren / Flächen

Vierecke

Ein Viereck, bei dem jeweils zwei benachbarte Seiten gleich lang sind, heißt Drachen.

Ein Viereck, bei dem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm.

In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang.

Ein Viereck, bei dem zwei gegenüberliegenden Seiten parallel sind, heißt Trapez. Die nicht parallelen Seiten heißen Schenkel.

Ein Trapez, bei dem die Schenkel gleich lang sind, heißt gleichschenkliges Trapez.

Ein Viereck, bei dem benachbarte Seiten orthogonal sind, heißt Rechteck.

Ein Viereck, bei dem alle Seiten gleich lang sind, heißt Raute.

Ein Viereck, bei dem alle Seiten gleich lang und benachbarte Seiten orthogonal sind, heißt Quadrat.

Diagonalen in Vielecken

Die Verbindungsstrecke zweier Eckpunkte eines Vieleckes, die nicht Seite ist, heißt Diagonale.

Eigenschaften der Diagonalen in besonderen Vierecken

Die Diagonalen ...

... im Quadrat:

- sind gleich lang,
- sind orthogonal,
- halbieren sich.

... im Rechteck:

- sind gleich lang,
- halbieren sich.

... im Parallelogramm:

- halbieren sich.

... in der Raute:

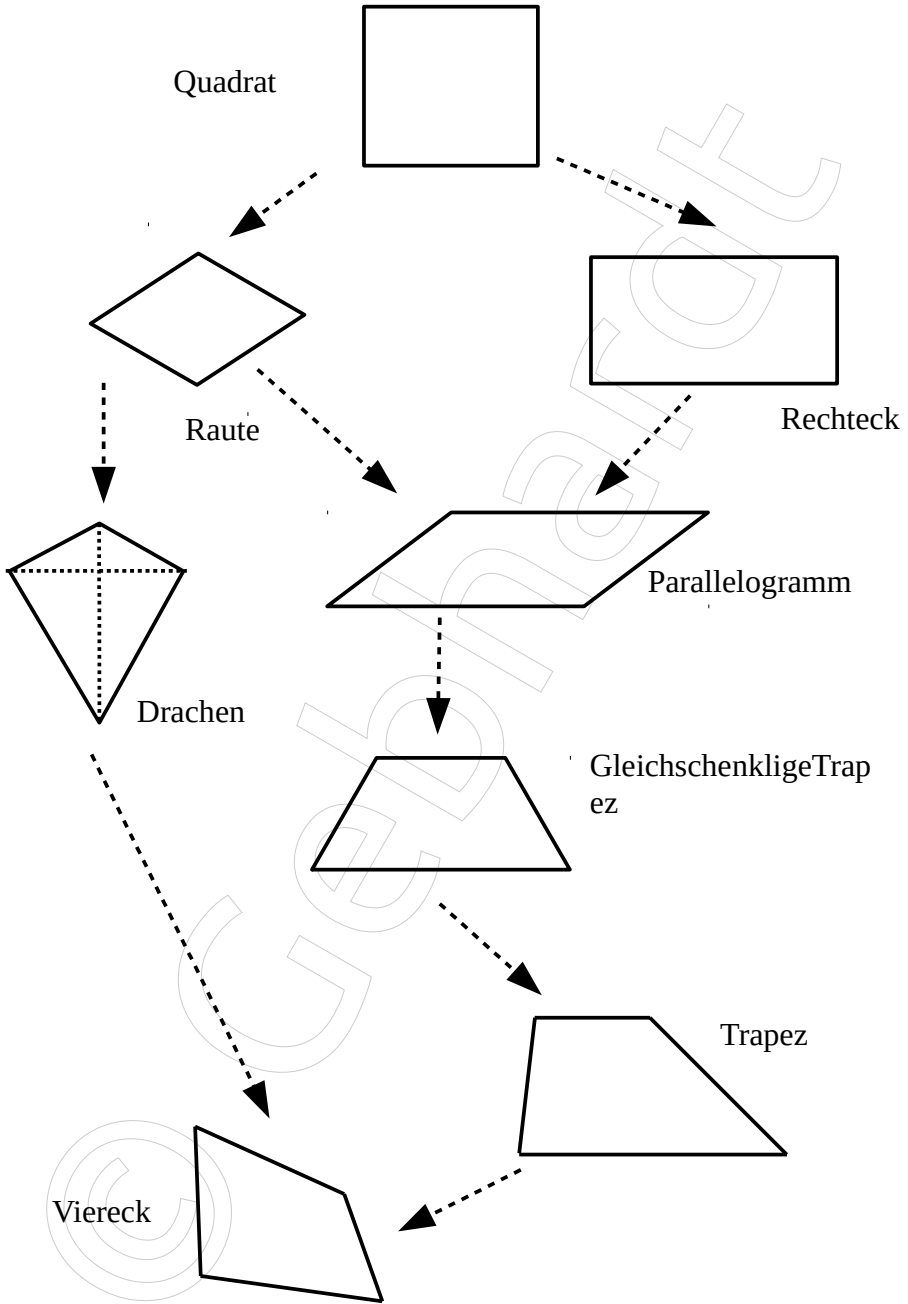
- sind orthogonal,
- halbieren sich.

... im Drachen:

- sind orthogonal,

(nur eine Diagonale wird halbiert).

Familie der Vierecke



Lies den Pfeil wie „... ist auch ein ...“



Umfang bei Figuren

Der Umfang u eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ist:

$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

$$u = 2 \cdot (a + b)$$

Für den Umfang eines Kreises mit dem Radius r bzw. dem Durchmesser d gilt :

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r \text{ bzw. } u = d \cdot \pi$$

Die Kreiszahl π (Pi) ist eine nicht-abbrechende und nicht-periodische Zahl. Sie hat den gerundeten Wert: $\pi \approx 3,14$

Beachte: Bei allen Längen-, Flächen- und Volumenberechnungen müssen die Maßzahlen der Strecken, Seiten bzw. Kanten in derselben Längeneinheit eingesetzt werden.

Höhen in Figuren

Unter der Höhe eines Parallelogramms versteht man den Abstand zweier zueinander parallelen Seiten. (Es gibt zwei Höhen.)

Unter der Höhe eines Dreiecks versteht man den Abstand eines Eckpunkts von der gegenüberliegenden Seiten bzw. deren Verlängerung. (Es gibt drei Höhen.)



Flächeninhalte

Der Flächeninhalt A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ist:

$$A = a \cdot b$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit der Länge a einer Seite (Grundseite) und der dazugehörigen Höhe h_a ist

$$A = a \cdot h_a.$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Länge a einer Seite und der Länge h_a der dazugehörigen Höhe ist

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a .$$

Für den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r gilt :

$$A = \pi \cdot r^2$$



Körper

Objekte, für deren Größenangabe man Maße in 3 Dimensionen benötigt, nennt man Körper.

Häufig wird ein Körper durch ebene Flächen begrenzt, die sich in Kanten berühren.

Eigenschaften eines Quaders

Ein Quader wird durch sechs Rechtecke begrenzt. Die gegenüberliegenden Flächen sind jeweils deckungsgleich (kongruent). Seine Kanten sind orthogonal zueinander.

Eigenschaften eines Würfels

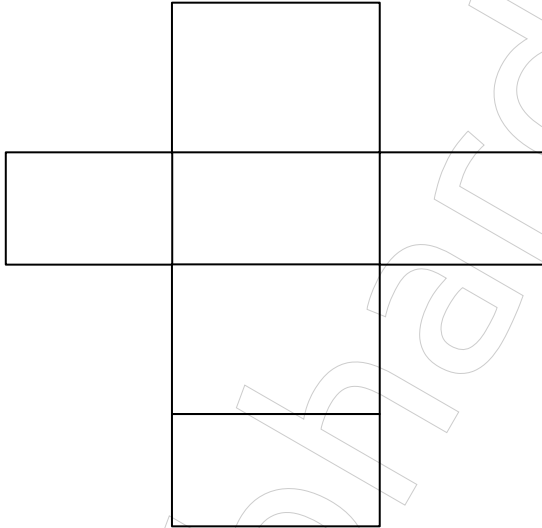
Ein Würfel ist ein Quader, der durch sechs gleiche Quadrate begrenzt wird.



Netz eines Körpers

Legt man alle Flächen eines Körpers zu einer zusammenhängenden Figur in der Ebene aus, so erhält man ein Netz des Körpers. Ein Körper kann verschiedene Netze haben.

Beispiel für das Netz eines Quaders:

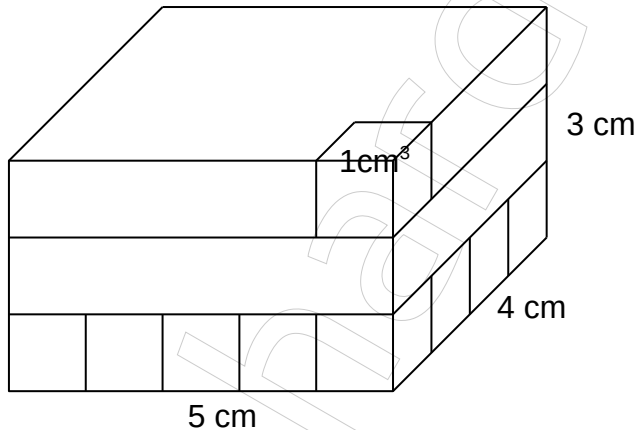


Volumen eines Quaders

Das Volumen V eines Quaders mit den Kantenlängen a , b und c ergibt sich aus

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Beispiel für einen Quader mit den Maßen $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ und $c = 3 \text{ cm}$



Eine Stange besteht aus 5 „ cm^3 -Würfeln“,
eine Platte besteht aus 4 Stangen, der Körper besteht aus 3
Platten

Damit besteht der Quader aus

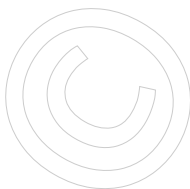
$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Würfeln und hat damit das Volumen 60 cm^3 .

Sonderfall Würfel:

Ein Würfel mit der Kantenlänge a hat das
Volumen

$$V = a^3.$$



Oberfläche eines Quaders

Ein Quader mit den Kantenlängen a , b , c
hat die Oberfläche

$$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c .$$

Sonderfall Würfel:

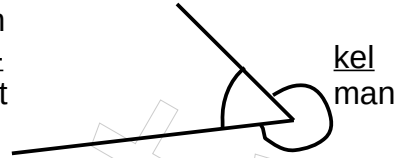
Ein Würfel mit der Kantenlänge a hat die Oberfläche

$$O = 6 \cdot a^2 .$$



Winkel

Zwei Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt schließen zwei Winkel ein. Die beiden Halbgeraden nennt Schenkel, den gemeinsamen Anfangspunkt Scheitel des Winkels.



Weitere Beschreibung (mit Orientierung):

Dreht man die eine Halbgerade (erster Schenkel) im Gegen-uhrzeigersinn um ihren Anfangspunkt bis zur anderen (zweiter Schenkel), so überstreicht die Halbgerade ein Gebiet, das man Winkel nennt.

Bezeichnungen für Winkel:

Ein Winkel kann durch

(1) mithilfe der Halbgeraden (1. und 2. Schenkel des Winkels):

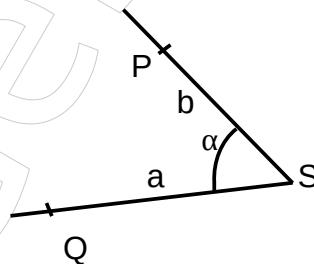
☞ ba

(2) mithilfe von Punkten auf den Schenkeln und dem Scheitel :

☞ PSQ

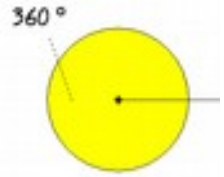
(3) durch einen griechische Buchstaben: α ($\beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$)

(lies: alpha, beta, gamma, delta, epsilon)



Winkelmaß

Winkel werden in der Einheit ° (Grad) gemessen.

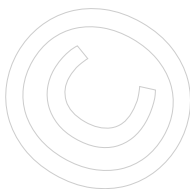


Dreht man eine Halbgerade so weit um den Scheitel, bis sie auf sich fällt, so überstreicht die Halbgerade einen Vollwinkel.

Teilt man einen Vollwinkel in 360 gleiche Teile, so hat jeder Teilwinkel das Maß ein Grad (1°).

Einteilung der Winkel (Typisierung der Winkel):

spitzer Winkel	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	
rechter Winkel	90°	
stumpfer Winkel	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	
gestreckter Winkel	180°	
über stumpfer Winkel	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$	



Geometrische Abbildungen

Bei den geometrischen Abbildungen in der Ebene E wird jedem Punkt P der Ebene ein Punkt P' zugeordnet. P' heißt auch Bildpunkt zum Punkt P .

Gilt für alle Punkte P der Ebene E und ihre Bildpunkte $P' P = P'$, so ist die Abbildung die identische Abbildung.

Achsenspiegelung

Gegeben ist die Spiegelachse g . Es gilt:

- (1) die Verbindungsstrecke PP' ist orthogonal zur Geraden g ,
- (2) P und P' haben von der Geraden g den gleichen Abstand.

Punktspiegelung

Gegeben ist das Spiegelzentrum Z . Es gilt:

- (1) die Verbindungsstrecke PP' geht durch das Zentrum Z ,
- (2) P und P' haben vom Punkt Z den gleichen Abstand.

Verschiebung

Gegeben ist ein Verschiebungspfeil \overrightarrow{QR} . Es gilt:

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QR}$$

Zentrische Streckung

Gegeben ist das Streckzentrum S und der Streckfaktor

$$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \text{ Es gilt:}$$

- (1) P und P' liegen auf einer Geraden durch S ,
- (2) $\overline{SP'} = |k| \cdot \overline{SP}$,
- (3) ist $k < 0$, so liegen P und P' auf verschiedenen Seiten bezüglich S .



Symmetrien

Achsensymmetrie

Eine Figur heißt achsensymmetrisch zur Achse a , wenn sie durch eine Achsenspiegelung an a auf sich selbst abgebildet werden kann.

Die Achse heißt dann Symmetrieachse.

Punktsymmetrie

Eine Figur heißt punktsymmetrisch zum Punkt Z , wenn sie durch eine Punktspiegelung an Z auf sich selbst abgebildet werden kann.

Der Punkt Z heißt dann Symmetriepunkt.



Ortslinien

Kreis

Die Menge aller Punkte, die von einem Punkt M den gleichen Abstand r haben, liegen auf einem Kreis (einer Kreislinie). Der Punkt M heißt Mittelpunkt, der Abstand r heißt Radius des Kreises $k(M;r)$.

Mittelsenkrechte

Die Menge aller Punkte, die von zwei Punkten A und B den gleichen Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB .



Konstruktion: Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte zweier Kreise um A bzw. B mit gleichem Radius ist die Mittelsenkrechte.



Sätze im Dreieck

Satz des Thales

Liegt die Ecke C eines Dreiecks ABC auf dem Kreis mit dem Durchmesser \overline{AB} , dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

Kehrsatz des Thales-Satzes

Ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$, dann liegt C auf einem Halbkreis über der Seite \overline{AB} .

Satz des Pythagoras

Hat ein rechtwinkliges Dreieck die Hypotenuse c sowie die Katheten a und b, dann gilt für die Seitenlängen

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Kehrsatz des Pythagoras

Gilt für die Seitenlängen eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ dann ist das Dreieck rechtwinklig mit der Hypotenuse c sowie den Katheten a und b.



Strahlensätzen

1. Strahlensatz : Werden zwei sich schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich Streckenlängen auf der einen Geraden wie die entsprechenden Streckenlängen auf der anderen Geraden.
2. Strahlensatz : Werden zwei sich schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich Streckenlängen auf den Parallelen wie die entsprechenden von S aus gemessenen Streckenlängen auf einem Strahl.

